20/4/20

$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$

Πρόταση: Έστω M R-μόδιο με $M = M_1 \oplus M_2$.
$\Rightarrow M/M_1 \simeq M_2$

$M = M_1 + M_2$, $M_1 \cap M_2 = \{0_M\}$

$m = m_1 + m_2$
↳ η γραφή είναι μοναδική!

Απόδειξη: Ορίζω $\varphi : M \to M_2$
$m \mapsto m_2$

η φ καλά ορισμένη αφού $m = m_1 + m_2$ μοναδική.

φ: ομομορφισμός

Έστω $m, m' \in M \Rightarrow$ $m = m_1 + m_2$, $m' = m_1' + m_2'$ (με μοναδ. τρόπο)

- $\varphi(m+m') = \varphi(m_1 + m_2 + m_1' + m_2') = m_2 + m_2' = \varphi(m) + \varphi(m')$

$r \in R$

- $\varphi(rm) = \varphi(r(m_1+m_2)) = rm_2 = r\varphi(m)$

$$\begin{aligned} \ker\varphi &= \{m \in M : \varphi(m) = 0_{M_2}\} \\ &= \{m \in M : m_2 = 0_{M_2}\} \\ &= \{m_1 + m_2 : m_2 = 0_{M_2}\} \\ &= \{m_1 + 0 = m_1\} = M_1 \end{aligned}$$

Άρα $M/M_1 \simeq \mathrm{Im}\varphi$.

φ: επί; $\varphi : M \to M_2$
$\underset{m_1+m_2}{\overset{m}{}} \longrightarrow m_2$

Έστω τυχαίο $m_2 \in M_2$ παρατ. ότι $\exists\ m_1 + m_2$
$\varphi(m_1+m_2) = m_2$
$\Rightarrow \varphi$ επί $\Rightarrow Im\varphi = M_2$

Αντίστοιχα γενικεύονται:
<u>Θεώρημα</u>: M R-μόδιος με $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$

$$\Rightarrow M \big/ M_1 \oplus \ldots \oplus M_{i-1} \oplus M_{i+1} \oplus \ldots \oplus M_k \simeq M_i$$

<u>Ορισμός</u> Αν ένας M R-μόδιος με $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$
$\Rightarrow$ θα λέμε ότι ο M <u>διασπάται</u> στο ευθύ άθροισμα των υπομοδίων του.

<u>Ορισμός</u>: Ένας R-μόδιος $M \neq \{0_M\}$ ονομάζεται <u>αδιάσπαστος</u> αν η μοναδική του διάσπαση σε ευθύ άθροισμα υπομοδίων του είναι η τετριμένη.
$M = M \oplus \{0_M\} = \{0_M\} \oplus M$.
Σε αντίθετη περίπτωση ο M καλείται <u>διασπάσιμος</u>

* Δηλαδή, ο R-μόδιος $M \neq \{0_M\}$ είναι αδιάσπαστος αν η σχέση $M = M_1 \oplus M_2$
$\Rightarrow M = M_1$ κ' $M_2 = \{0_M\}$
ή
$M = M_2$ κ' $M_1 = \{0_M\}$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ με $\text{μκδ}(\mu, \nu) = 1$
Νδο ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_{\mu\nu}$ είναι διασπάσιμος

Θδο $\mathbb{Z}_{\mu\nu} \simeq \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\nu$
ορίζω $\varphi: \mathbb{Z}_{\mu\nu} \to \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\nu$

Μια 1-1 απεικόνιση ανάμεσα σε στοιχεία ίσης τάξης είναι και επί !

$\bar{a}_{\mu\nu} \longmapsto (\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu)$

Δείχνω ότι η φ καλά ορισμένη
Έστω $\bar{a}_{\mu\nu} = \bar{\beta}_{\mu\nu} \Rightarrow \bar{a}_{\mu\nu} - \bar{\beta}_{\mu\nu} = \bar{0}_{\mu\nu}$

$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \mu\nu \mid a-\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \mid \mu\nu \mid a-\beta \\ \text{και} \\ \nu \mid \mu\nu \mid a-\beta \end{cases}$

$\begin{cases} \bar{a}_\mu = \bar{\beta}_\mu \\ \bar{a}_\nu = \bar{\beta}_\nu \end{cases} \Rightarrow (\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu) = (\bar{\beta}_\mu, \bar{\beta}_\nu)$
$\varphi(\bar{a}_{\mu\nu}) = \varphi(\bar{\beta}_{\mu\nu})$

Άρα, φ καλά ορισμένη

φ: R-ομομ.
Έστω $\bar{a}_{\mu\nu}, \bar{\beta}_{\mu\nu}$

- $\varphi(\bar{a}_{\mu\nu} + \bar{\beta}_{\mu\nu}) = \varphi(\overline{(a+\beta)}_{\mu\nu}) = (\overline{(a+\beta)}_\mu, \overline{(a+\beta)}_\nu)$
  $= (\bar{a}_\mu + \bar{\beta}_\mu, \bar{a}_\nu + \bar{\beta}_\nu) = (\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu) + (\bar{\beta}_\mu, \bar{\beta}_\nu)$
  $= \varphi(\bar{a}_{\mu\nu}) + \varphi(\bar{\beta}_{\mu\nu})$

- $\varphi(r\,\bar{a}_{\mu\nu}) = \varphi(\overline{(ra)}_{\mu\nu}) = (r\bar{a}_\mu, r\cdot\bar{a}_\nu)$
  $= r(\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu) = r\,\varphi(\bar{a}_{\mu\nu})$

φ: 1-1 : Δδο $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}_{\mu\nu}\}$
Έστω $\bar{a}_{\mu\nu} \in \operatorname{Ker}\varphi \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \varphi(\bar{a}_{\mu\nu}) = (\bar{0}_\mu, \bar{0}_\nu)$

$(\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu) = (\bar{0}_\mu, \bar{0}_\nu) \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_\mu = \bar{0}_\mu \\ \text{και} \\ \bar{a}_\nu = \bar{0}_\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \mid a-0 \\ \text{και} \\ \nu \mid a-0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu \mid a \\ \nu \mid a \end{cases} \xLeftrightarrow{\mu\kappa\delta(\mu,\nu)=1} \mu\cdot\nu \mid a$

$\Leftrightarrow \bar{a}_{\mu\nu} = \bar{0}_{\mu\nu} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}_{\mu\nu}\}$

$\Leftrightarrow \varphi : 1-1$

* $|\mathbb{Z}_{\mu\nu}| = \mu\nu$ και η φ 1-1 $\Rightarrow \varphi$: επί

$|\mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\nu| = \mu\nu$

φ καλά ορισμένη, ομομορφισμός, 1-1, επί $\Rightarrow$ φ ισομορφ.

$\mu\nu(1) = \mu() + \nu()$
μκδ(μ,ν) μοναδική γραφή

$\mathbb{Z}_{\mu\nu} \simeq \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\nu$
$\bar{a}_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}_{\mu\nu}$: $\bar{a}_{\mu\nu} = a \cdot 1$

Ελεύθεροι Μόδιοι

Ορισμός: Έστω $X \subseteq M$ R-μόδιο. Αν για κάθε πεπερασμένο R-γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του X που ισούται με 0_M όλοι οι συντελεστές $\in R$ του συνδυασμού είναι 0_R, τότε το σύνολο X καλείται R-γραμμικά ανεξάρτητο.
Αν ένα σύνολο δεν είναι R-γραμμικά ανεξάρτητο, καλείται R-γραμμικά εξαρτημένο.

αν $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0_M$

$\Rightarrow r_i = 0_R \Rightarrow$ Το X καλείται R-γραμ. ανεξάρτητο
* Το κενό σύνολο το θεωρούμε γρ. ανεξάρτητο

Παρατήρηση: Ένα γραμ. ανεξ. σύνολο ΔΕΝ περιέχει το 0_M.
$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, 0_M\}$
$\underset{r_1}{0_R} x_1 + \underset{r_2}{0_R} x_2 + \underset{r_3}{0_R} x_3 + \dots + \underset{r_k}{0_R} x_k + \underset{r_{k+1}}{1_R} 0_M = 0_M$

Ορισμός: Ένα R-γραμ. ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων X ενός R-μοδίου M καλείται βάση του M (R-βάση)

Είναι κάθε σύνολο γεννητόρων βάση; ΟΧΙ

Πχ Το $\{3,4\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$. $\longrightarrow$ ΟΧΙ Γ.Α

3, 4 πρώτοι μεταξύ τους, $\mu\kappa\delta(3,4)=1$

$\underset{\sim}{k \cdot 1} = (k)3 + (k)\underset{\sim}{4}$

$3(-4)+4(3)=0$ ενώ $-4, 3 \neq 0$

Ορισμός: Ένας R-μόδιος M καλείται ελεύθερος αν διαθέτει R-βάση

Πχ 1) Κάθε R-δακτύλιος είναι ελεύθερος R-μόδιος αφού έχει βάση $\{1_R\}$

Πχ ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}$ ελεύθερος

2) Ο δακτύλιος $R[x]$ όπου R μεταθετικός δακτύλιος είναι ελεύθερος R-μόδιος $\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$

3) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$ όχι ελεύθερος.

Έστω $X \neq \phi$ υποσύνολό του και $x \in X$, $x \neq 0$.

Παρατ. ότι $\bar{x} \cdot n = \bar{0}_n$, $n \neq 0$

$X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\} \subseteq \mathbb{Z}_n$

$n \cdot \bar{x}_1 + n\bar{x}_2 + \dots + n\bar{x}_k = \bar{0}_n$

Ο $\mathbb{Z}_n$-μόδιος $\mathbb{Z}_n$ είναι ελεύθερος!

4) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ δεν είναι ελεύθερος

Παρατηρώ ότι το τυχαίο στοιχείο

$m + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Q}$

$\frac{\alpha}{\beta} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$\beta \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathbb{Z}\right) = 0 + \mathbb{Z}$

$$\beta\left(\frac{a}{\beta}+\mathbb{Z}\right)=\beta\frac{a}{\beta}+\mathbb{Z}=a+\mathbb{Z}$$

αλλά $a+\mathbb{Z}=0+\mathbb{Z}$, αφού $a-0\in\mathbb{Z}$.

άρα, αν ο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-ελεύθερος
$\left\{\frac{a_1}{\beta_1}+\mathbb{Z}, \dots, \frac{a_k}{\beta_k}+\mathbb{Z}\right\}$ βάση

$$\beta_1\left(\frac{a_1}{\beta_1}+\mathbb{Z}\right)+\beta_2\left(\frac{a_2}{\beta_2}+\mathbb{Z}\right)+\dots=0+\mathbb{Z}$$

$$(a_1+\mathbb{Z})+\dots+(a_k+\mathbb{Z})=(a_1+\dots+a_k)+\mathbb{Z}$$
$$=0+\mathbb{Z}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω M R-μόδιος και $\{e_1,\dots,e_k\}\subseteq M$.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
1) το $\{e_1,\dots,e_k\}$ παράγει το M $(M=\langle e_i\rangle+\dots+\langle e_k\rangle)$ και είναι R-γραμ. ανεξάρτητο.
2) κάθε $m\in M$ γράφεται με μοναδικό τρόπο $m=r_1e_1+\dots+r_ke_k$, $\forall r_i\in R$
3) $M=\langle e_1\rangle\oplus\dots\oplus\langle e_k\rangle$ και $Ann(e_i)=0_R$, $\forall i$

<u>Αποδ.</u>: (1) ⇒ (2) Έστω $m\in M$ άρα $m=r_1e_1+\dots+r_ke_k$, $r_i\in R$
Έστω ότι $\exists\, s_i\in R$ $m=s_1e_1+\dots+s_ke_k$
$0=(r_1-s_1)e_1+(r_2-s_2)e_2+\dots+(r_k-s_k)e_k$
$\xrightarrow[\Gamma.A.]{\{e_1,\dots,e_k\}} r_i-s_i=0_R$, $\forall i$ ⇒ $r_i=s_i$, $\forall i$.

(2) ⇒ (3) αφού $\forall m\in M$ $m=r_ie_1+\dots+r_ke_k$, με μοναδ. τρόπο ⇒ $M=\langle e_1\rangle+\dots+\langle e_k\rangle$
αρκεί νδο $e_i\cap\sum_{i\neq j}e_j=\{0_R\}$
Έστω $\mu\in$ ______
⇒ $\mu\in\langle e_i\rangle$: $\mu=r_ie_i$, $r_i\in R$
$\mu\in\Sigma$: $\mu=r_1e_1+\dots+r_{i-1}e_{i-1}+r_{i+1}e_{i+1}+\dots+r_ke_k$

$r_i e_i = r_1 e_1 + \dots + r_{i-1} e_{i-1} + r_{i+1} e_{i+1} + \dots + r_k e_k$

$\Rightarrow r_1 e_1 + \dots + r_{i-1} e_{i-1} + (-r_i) e_i + r_{i+1} e_{i+1} + \dots + r_k e_k = 0_R$

Παρατ. ότι

$0_R e_1 + 0_R e_2 + \dots + 0_R e_i + \dots + 0_R e_k = 0_R$

Λόγω μοναδικότητας γραφής $r_i = 0_R$

$\mu = r_i e_i = 0_R e_i = 0_R$

$\Rightarrow M = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_k \rangle$

Μένει νδο $Ann(e_i) = 0_R$

$Ann(e_i) = \{ r \in R : r e_i = 0_R \} = \{ 0_R \}$

Αλλά, $0 e_i = 0_R$ και η γραφή μοναδική

$\Rightarrow r = 0_R$

Αν βρω για ένα στοιχείο $Ann \neq 0$, τότε αυτό το στοιχείο δεν μπορεί να συμμετέχει σε βάση !

(3) $\Rightarrow$ (1) $M = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_k \rangle$ και $Ann(e_i) = 0_R$

$M = \langle e_1 \rangle + \dots + \langle e_k \rangle$

$\Rightarrow$ το $\{e_1, \dots, e_k\}$ παράγει το M

Μ νδο R-γραμμ. ανεξάρτητο

Έστω $r_1 e_1 + \dots + r_k e_k = 0_R$, $r_i \in R$

$\Rightarrow (-r_i) e_i = r_1 e_1 + r_2 + e_2 + \dots + r_{i-1} e_{i-1} + r_{i+1} e_{i+1} + \dots + r_k e_k$.

$r_i e_i \in \langle e_i \rangle$ και

$r_i e_i \in \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle + \dots + \langle e_k \rangle$

$\in \sum_{i \neq j} \langle e_j \rangle$

άρα $r_i e_i \in \langle e_i \rangle \cap \sum_{j \neq i} \langle e_j \rangle \overset{\text{εδώ}}{=} 0_R$

άρα $r_i e_i = 0_R$, $\forall i$

$\Rightarrow r_i \in Ann(e_i) = \{0_R\}$

$\Rightarrow r_i = 0_R \ \forall i$

Παρατηρήσεις :

1) Δεν αληθεύει ότι υπομόδιο ελεύθερου μοδίου είναι ελεύθερο.

<u>πχ</u> $\mathbb{Z}_6$-μόδιο $\mathbb{Z}_6$ ελεύθερο (βάση $<\bar{1}_6>$)

$\Rightarrow \underbrace{\{\bar{0}_6, \bar{2}_6, \bar{4}_6\}}_{<\bar{2}_6>} \subseteq \mathbb{Z}_6$ όχι $\mathbb{Z}_6$ ελεύθερο

$Ann(\bar{4}_6) = \bar{3}_6$ (όχι μόνο το $\bar{0}_6$)

Το $\bar{0}_6 \in \{\bar{0}_6, \bar{2}_6, \bar{4}_6\}$ άρα όχι Γ. Α.

2) Έστω Μ ελεύθερο R-μόδιο και έχει βάση κ σε πλήθος στοιχεία.

$\Rightarrow$ δεν έχω ότι κάθε R-γ.α. σύνολο με κ στοιχεία είναι και αυτό βάση — ελεύθερο

<u>πχ</u> $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z}$ μια βάση το $1_{\mathbb{Z}}$

<u>πχ</u> το $<2>$ είναι R-γ.α. και είναι 1 στοιχείο αλλά όχι βάση (δεν παράγει το $\mathbb{Z}$)

$5 = k \cdot 2 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

3) Είδαμε ότι κάθε R-μόδιο R ελεύθερο

Γενικά το $R^k = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{k\text{-φορές}}$ είναι ελεύθερος R-μόδιος

βάση $\{\underbrace{(1_R, 0_R, \ldots, 0_R)}_{=e_1}, \underbrace{(0_R, 1_R, 0_R, \ldots, 0_R)}_{=e_2}, \ldots \underbrace{(0_R, \ldots, 0_R, 1_R)}_{=e_k}\}$

Αντίστοιχα, η βάση αυτή θα καλείται η κανονική βάση του R-μόδιου R^k.